Transfer principle in integral geometry

酒井 高司　(首都大学東京)

1 Introduction

M と N を Riemann 等質空間 G/K の部分多様体とする。一方の M は固定したままもう一方の N を Lie 群 G の元 g の作用によって動かし、共通部分 $M \cap gN$ について部分多様体としての不変量 $I(M \cap gN)$ を考える。このとき、G 上の積分

$$\int_G I(M \cap gN) d\mu_G(g)$$

の値を表す等式は kinematic formula と呼ばれている。例えば、$\mathrm{vol}(M \cap gN)$ を被積分関数としたときは Poincaré の公式と呼ばれ、実空間形の場合積分値は M と N の体積の積の普遍定数倍になることが知られている (see [8])。また、Chern [3] と Federer [4] によって次のような顕著な kinematic formula が示されている。

定理 1.1. $0 \leq 2l \leq p + q - n$ と仮定する。このとき定数 $c(n,p,q,l,i)$ が存在して、$\mathbb{R}^n$ 内の p 次元と q 次元の部分多様体 M と N について

$$\int_{I(\mathbb{R}^n)} \mu_{2l}(M \cap gN) dg = \sum_{i=0}^{l} c(n,p,q,l,i) \mu_{2i}(M) \mu_{2(l-i)}(N)$$

が成り立つ。ここで、μ_{2l} は Weyl の管状近傍公式に現れる積分不変量である。

後に、Howard [5] は第二基本形式に関する不変多項式から部分多様体の積分不変量を定義し、M と N のそれぞれの接空間全体の集合が G によって推移的に移りあうとき、これらの積分不変量に関する kinematic formula は M と N の積分不変量によって表されることを示した。また、その証明の過程において G 上の積分を K 上の積分に帰着させていることから、線形イソトロピー表現が同値な等質空間においては同様な kinematic formula が成立することを示し、これを積分幾何学における "*Transfer Principle*" (転送原理) と呼んだ。

Two point homogeneous space は線形イソトロピー群が原点における接空間内の超球面に推移的に作用することから、Howard による意味で任意の超曲面に関する kinematic formula は M と N の積分不変量によって表されるはずである。しかしそれらの具体的な表示を与えることは自明でない。本講演では transfer principle の一般化について議論し、two point homogeneous space 内の超曲面に関するいくつかの kinematic formula は実空間形の場合の表示を転送することによって得られることを示す。

2 The kinematic formula and the transfer principle

ここでは Howard [5] によって与えられた Riemann 等質空間における kinematic formula の定式化に関する主張とその証明において本質的となる generalized kinematic formula について簡単に解説する。

G を Lie 群とし、K はそのコンパクト部分群であるとする。G に左不変かつ K の右からの作用で不変な計量があるとき、G/K は Riemann 等質空間になる。G/K の原点 o における接空間を $T = T_o(G/K)$ で表すことにする。

定義 2.1. V を T の部分空間とする。G/K の部分多様体 M の各点 $x \in M$ に対して $(g_x)_*V = T_xM$ となる $g_x \in G$ が存在するとき M を V 型部分多様体と呼ぶ。

T の部分空間 V に対してベクトル空間 $\mathrm{II}(V)$ を次で定義する。

$$\mathrm{II}(V) = \{V \times V \longrightarrow V^{\perp} \ ; \ \text{symmetirc bilinear form}\}$$

原点 o において V を接空間として持つ G/K の部分多様体の第二基本形式は $\mathrm{II}(V)$ の元になる。V を固定する K の元のなす部分群を $K(V)$ で表す。$K(V)$ は次のようにして $\mathrm{II}(V)$ に作用する。$k \in K(V)$ と $h \in \mathrm{II}(V)$ について

$$(kh)(u,v) = k_*\left(h(k_*^{-1}u, k_*^{-1}v)\right) \qquad (u, v \in V) \tag{2.1}$$

$\mathrm{II}(V)$ はベクトル空間であるからその上の多項式を考えることができ、$\mathrm{II}(V)$ 上の多項式 $\mathcal{P}$ が

$$\mathcal{P}(kh) = \mathcal{P}(h) \qquad ({}^{\forall}k \in K(V),\ {}^{\forall}h \in \mathrm{II}(V))$$

を満たすとき $K(V)$ 不変であると言う。

$\mathcal{P}$ が $K(V)$ 不変であり M が G/K の V 型の部分多様体であるとき、各点 $x \in M$ において $\mathcal{P}(h_x^M)$ を

$$\mathcal{P}(h_x^M) = \mathcal{P}(h_o^{g_x^{-1}M})$$

によって定めると、これは $g_x \in G$ の選び方によらない。これにより、$\mathcal{P}$ に関する M の積分不変量 $I^{\mathcal{P}}(M)$ を

$$I^{\mathcal{P}}(M) = \int_M \mathcal{P}(h_x^M) d\mu_M(x) \tag{2.2}$$

によって定義することができる。ただし、積分の収束は仮定する。

上では積分不変量を定義するために M が T のある部分空間 V について V 型の部分多様体であることが必要であった。次に V 型とは限らない一般の部分多様体について積分不変量を定義するために次のように第二基本形式を拡張する。

Riemann 多様体 S の部分多様体 M に対して

$$H_x^M(u,v) = h_x^M(Pu, Pv) \qquad (u, v \in T_xS)$$

で定まる対称双線形写像 $H_x^M : T_xS \times T_xS \longrightarrow T_xS$ を $x \in M$ における M の extended second fundamental form と呼ぶ。ここで、P は T_xS から T_xM への直交射影を表す。

$$\mathrm{EII}(T) = \{T \times T \longrightarrow T \ ; \ \text{symmetric bilinear form}\}$$

とおく。$K(V)$ が $\mathrm{II}(V)$ に作用するのと同様に K は $\mathrm{EII}(T)$ に作用する。$\mathcal{P}$ が $\mathrm{EII}(T)$ 上の K 不変な多項式であるとき、G/K の部分多様体 M の積分不変量 $I^{\mathcal{P}}(M)$ を (2.2) と同様にして定義することができる。

以上の準備の下で Howard による一般の Riemann 等質空間における kinematic formula は次のように述べることができる。

定理 2.2 (Howard [5]). G/K を Riemann 等質空間とし G はユニモジュラー Lie 群であると仮定する。$\mathcal{P}$ は $\mathrm{EII}(T)$ 上の K 不変な l 次同次多項式であるとする。さらに、V と W は $\dim V + \dim W \geq \dim(T)$ となる T の部分空間で

$$\int_K \sigma(V^\perp, k_* W^\perp)^{1-l} d\mu_K(k) < \infty \tag{2.3}$$

を満たすものとする。このとき、次の条件を満たす有限個の組 $(\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ が存在する。

(1) 各 $\mathcal{Q}_\alpha$ は $\mathrm{II}(V)$ 上の $K(V)$ 不変同次多項式

(2) 各 $\mathcal{R}_\alpha$ は $\mathrm{II}(W)$ 上の $K(W)$ 不変同次多項式

(3) 各 α について

$$\deg \mathcal{Q}_\alpha + \deg \mathcal{R}_\alpha = l$$

(4) 任意の V 型部分多様体 M と W 型部分多様体 N について

$$\int_G I^{\mathcal{P}}(M \cap gN) d\mu_G(g) = \sum_\alpha I^{\mathcal{Q}_\alpha}(M) I^{\mathcal{R}_\alpha}(N) \tag{2.4}$$

が成り立つ。

ここで、$\sigma(V^\perp, k_* W^\perp)$ は部分空間 $V^\perp$ と $k_* W^\perp$ の間の角度を表す。条件 (2.3) は積分の収束に関する条件であり、実空間形の場合 $l \leq \dim(V) + \dim(W) - \dim(T) + 1$ ならばこの条件を満たす。

定理 2.2 を説明するためにさらにいくつかの定義と補題を必要とする。$0 \leq p \leq n$ として

$$\mathrm{II}_p(T) = \{(V, h) \mid V \in Gr_p(T), h \in \mathrm{II}(V)\}$$

とおく。$Gr_p(T)$ は T 内の q 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を表す。$(V, h) \in \mathrm{II}_p(T)$ と $V + W = T$ なる T の部分空間 W に対して $G_W(V, h) \in \mathrm{EII}(T)$ を

$$G_W(V, h)(u, v) = P_W^V(h(Pu, Pv)) \qquad (u, v \in T)$$

によって定める。ここで、P_W^V は V を kernel とする T から $(V \cap W)^\perp \cap W$ への射影であり、P は直交射影 $T \longrightarrow V \cap W$ を表す。$G_W(V, h)$ を W による (V, h) の geodesic section と呼ぶ。

定義 2.3. $p + q \geq n$ として、$(V, h_1) \in \mathrm{II}_p(T)$, $(W, h_2) \in \mathrm{II}_q(T)$ と $\mathrm{EII}(T)$ 上の K 不変な多項式 $\mathcal{P}$ について

$$I_K^{\mathcal{P}}(V, h_1, W, h_2) = \int_K \mathcal{P}\left(G_{k_*^{-1}W}(V, h_1) + G_V(k_*^{-1}W, k^{-1}h_2)\right) \sigma(V^\perp, k_*^{-1}W^\perp) d\mu_K(k)$$

を定義する。ただし、積分の収束は仮定する。

補題 2.4. 定理 2.2 の設定の下で次の条件を満たす有限個の組 $(\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{R}_\alpha)$ が存在する。

(1) 各 $\mathcal{Q}_\alpha$ は $\mathrm{II}(V)$ 上の $K(V)$ 不変同次多項式

(2) 各 $\mathcal{R}_\alpha$ は $\mathrm{II}(W)$ 上の $K(W)$ 不変同次多項式

(3) 各 α について
$$\deg \mathcal{Q}_\alpha + \deg \mathcal{R}_\alpha = l$$

(4) 任意の $h_1 \in \mathrm{II}(V)$ と $h_2 \in \mathrm{II}(W)$ について
$$I_K^{\mathcal{P}}(V, h_1, W, h_2) = \sum_\alpha \mathcal{Q}_\alpha(h_1)\mathcal{R}_\alpha(h_2)$$
が成り立つ。

定理 2.2 の設定の下で M は G/K の V 型の部分多様体であり、N は W 型の部分多様体であるとするとする。各点 $x \in M$ と $y \in N$ に対してそれぞれ $\xi_* V = T_x M,\ \eta_* W = T_y N$ となる $\xi, \eta \in G$ をとる。ここで
$$I_K^{\mathcal{P}}(V, h_x^M, W, h_y^N) := I_K^{\mathcal{P}}(V, h_o^{\xi^{-1}M}, W, h_o^{\eta^{-1}N})$$
とおくと、定義 2.3 よりこれは $\xi, \eta \in G$ のとり方に依存しないことが分かる。このとき次が成り立つ。

補題 2.5. (generalized kinematic formula)
$$\int_G I^{\mathcal{P}}(M \cap gN) d\mu_G(g) = \int_{M\times N} I_K^{\mathcal{P}}(V, h_x^M, W, h_y^N) d\mu_{M\times N}(x, y)$$

補題 2.4 と補題 2.5 より定理 2.2 を得る。さらに、これらの議論から次の結論を得る。

The trasfer principle. 定理 2.2 の設定の下 G' は G と同じ次元のユニモジュラー Lie 群であるとする。また、K' は K と同じ次元の G' のコンパクト部分群で $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K')$ であるとする。さらに、Lie 群の同型写像 $\rho : K \longrightarrow K'$ と等長線形同型写像 $\psi : T \longrightarrow T$ で
$$\psi \circ k_* = \rho(k)_* \circ \psi \qquad ({}^\forall k \in K) \tag{2.5}$$
を満たすものが存在すると仮定する。

$V' = \psi V,\ W' = \psi W$ とおくと写像 ψ から次の線形同型写像が誘導される。
$$\mathrm{II}(V) \longrightarrow \mathrm{II}(V'), \qquad \mathrm{II}(W) \longrightarrow \mathrm{II}(W'), \qquad \mathrm{EII}(T) \longrightarrow \mathrm{EII}(T_{o'}(G'/K'))$$
同様に、これらのベクトル空間上の多項式環の間の同型写像も誘導される。多項式 $\mathcal{P}$ のこの同型写像による像を $\mathcal{P}'$ で表すことにする。条件 (2.5) より $\rho K(V) = K'(V'),\ \rho K(W) = K'(W')$ となり、ψ から誘導される多項式環の同型写像はそれぞれ不変多項式環の同型を与える。これにより、G/K において (2.4) の kinematic formula が成り立つならば、G'/K' の任意の ψV 型部分多様体 M' と ψW 型部分多様体 N' について次が成り立つことが分かる。
$$\int_{G'} I^{\mathcal{P}'}(M' \cap gN') d\mu_{G'}(g) = \sum_\alpha I^{\mathcal{Q}'_\alpha}(M') I^{\mathcal{R}'_\alpha}(N')$$

次に G/K が実空間形で G が等長変換群である場合を考える。このとき K は直交群 $O(T)$ になり $K(V)=O(V)\times O(V^{\perp})$ となる。補題 3.4 より $K(V)$ 不変な $\mathrm{II}(V)$ 上の奇数次の同次多項式は存在しない。次の多項式 $\mathcal{W}_{2l}$ は $\mathrm{II}(V)$ 上の $2l$ 次の不変同次多項式として知られている。

$$\mathcal{W}_{2l}(h)=\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\dots,i_{2l}\le p\\ p+1\le k_1,k_2,\dots,k_l\le n}}\det\begin{bmatrix} h^{k_1}_{i_1i_1} & h^{k_1}_{i_1i_2} & \cdots & h^{k_1}_{i_1i_{2l}}\\ h^{k_1}_{i_2i_1} & h^{k_1}_{i_2i_2} & \cdots & h^{k_1}_{i_2i_{2l}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h^{k_l}_{i_{2l-1}i_1} & h^{k_l}_{i_{2l-1}i_2} & \cdots & h^{k_l}_{i_{2l-1}i_{2l}}\\ h^{k_l}_{i_{2l}i_1} & h^{k_l}_{i_{2l}i_2} & \cdots & h^{k_l}_{i_{2l}i_{2l}}\end{bmatrix}$$

これらの多項式はあるシリンダーの第二基本形式について 0 になる不変同次多項式として特徴づけられる。G/K の部分多様体 M について積分不変量 $\mu_{2l}(M)$ を

$$\mu_{2l}(M)=I^{\mathcal{W}_{2l}}(M)$$

で定義する。これらの積分不変量 μ_{2l} について定理 1.1 が成り立つ。実は transfer principle により Chern-Federer formula は実空間形において成立する。定数 $a(p,q,n,k,l)$ の値は Chern [3] および Nijenhuis [7] によって与えられている。

次数 2 の $K(V)$ 不変同次多項式の空間は

$$\mathcal{Q}_1(h)=\sum_{\substack{1\le i,j\le p\\ p+1\le k\le n}}\left(h^k_{ij}\right)^2,\qquad \mathcal{Q}_2(h)=\sum_{p+1\le k\le n}\left(\sum_{1\le i\le p}h^k_{ii}\right)^2$$

によって張られる。さらに、$2\le p\le n-1$ のときこれら 2 つの多項式は独立になる。幾何学的には $\mathcal{Q}_1(h)$ は第二基本形式のノルムの 2 乗であり、$\mathcal{Q}_2(h)$ は平均曲率の p^2 倍である。しかし、次のように基底を取り替えたほうが都合がいい。

$$\mathcal{W}_2=\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_1,\qquad \mathcal{U}_p=p\mathcal{Q}_1-\mathcal{Q}_2$$

これらを使って 2 次の積分不変量に関する kinematic formula は次のように表される。

命題 2.6. $2\le p+q-n$ と仮定する。このとき、定数 $a(p,q,n)$ と $b(p,q,n)$ が存在して、実空間形 G/K の任意の部分多様体 M^p と N^q について次の kinematic formula が成り立つ。

$$\int_G I^{\mathcal{W}_2}(M\cap gN)dg=a(p,q,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)\mathrm{vol}(N)+a(q,p,n)\mathrm{vol}(M)I^{\mathcal{W}_2}(N)$$
$$\int_G I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M\cap gN)dg=b(p,q,n)I^{\mathcal{U}_p}(M)\mathrm{vol}(N)+b(q,p,n)\mathrm{vol}(M)I^{\mathcal{U}_q}(N)$$

定数 $a(p,q,n)$ および $b(p,q,n)$ の値は [6] において決定した。

$\mathcal{U}_p$ は p 次元部分多様体の umbilic point において 0 になる 2 次の不変同次多項式として特徴づけられる。さらに、積分不変量

$$I^{\mathcal{U}_p^{p/2}}(M)=\int_M\left(\mathcal{U}_p(h^M_x)\right)^{p/2}d\mu_M(x)$$

は Willmore-Chen 不変量と呼ばれ、p 次元部分多様体の共形不変量として知られている。(see [1], [2], [9])

3 Two point homogeneous spaces

ここでは Two point homogeneous space の定義と基本的な性質およびその分類について復習する (see [10])。

定義 3.1. S を連結 Riemann 多様体とする。$d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$ となる任意の $x_i, y_i \in S$ に対して $gx_1 = x_2,\ gy_1 = y_2$ となる S の等長変換 $g \in \mathrm{Isom}(S)$ が存在するとき S を two point homogeneous space と呼ぶ。

定義 3.2. S を Riemann 多様体とし、$x \in S$ に対して

$$\mathrm{Isom}(S)_x = \{g \in \mathrm{Isom}(S) \mid gx = x\}$$

とおく。$\mathrm{Isom}(S)_x$ は $T_x(S)$ 内の単位球面に作用するが、この作用が推移的であるとき S は $x \in M$ において isotropic であるという。さらに、S が全ての点において isotropic であるとき S は isotropic であるという。

次の命題はよく知られた事実である。

命題 3.3. S は連結な Riemann 多様体であるとする。このとき次の条件は同値である。

(1) S は two point homogeneous space

(2) S は isotropic

(3) S は Euclid 空間又は rank 1 対称空間

$K(V)$ (resp. K) は (2.1) によって $\mathrm{II}(V)$ (resp. $\mathrm{EII}(T)$) に作用するので T に $-\mathrm{id}$ で作用する元は $\mathrm{II}(V)$ (resp. $\mathrm{EII}(T)$) へも $-\mathrm{id}$ で作用する。したがって次を得る。

補題 3.4. $S = G/K$ を two point homogeneous space とする。ただし、G は S の等長変換群であると仮定する。このとき、$K(V)$ (resp. K) の作用で不変な $\mathrm{II}(V)$ (resp. $\mathrm{EII}(T)$) 上の奇数次の同次多項式は存在しない。

4 Poincaré formula in two point homogeneous spaces

命題 4.1 (Howard [5])**.** G/K を n 次元 two point homogeneous space とし、M^p と N^{n-1} をその部分多様体とする。このとき次が成り立つ。

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN)dg = \frac{\mathrm{vol}(K)\mathrm{vol}(S^{p-1})\mathrm{vol}(S^n)}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^{n-1})}\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$$

Two point homogeneous space では線形イソトロピー群が接空間内の球面には推移的に作用するが、実空間形以外の場合 rank 2 以上の Grassmann 多様体には推移的に作用しない。したがって、定理 4.1 は定理 2.2 の外になっている。しかし、補題 2.5 において K 上の積分を球面上の積分に帰着させることによって球面の対称性から定理 4.1 は明らかである。

5 Transferred kineamtic formulae in two point homogeneous spaces

G/K を n 次元の two point homogeneous space とする。G/K は isotropic であるから $v \in T$ について $K(v) = \{k \in K \mid k_* v = v\}$ とおくと、$K/K(v)$ は S^{n-1} と homothetic になる。

$\mathcal{P}$ を直交群 $O(T)$ の作用で不変な $\mathrm{EII}(T)$ 上の多項式とする。このとき、$(V, h_1) \in \mathrm{II}_p(T)$ と $(W, h_2) \in \mathrm{II}_{n-1}(T)$ に対して

$$\begin{aligned} & I_K^{\mathcal{P}}(V, h_1, W, h_2) \\ &= \int_K \mathcal{P}\Big(G_{k_* W}(V, h_1) + G_V(k_* W, k h_2)\Big)\sigma(V^\perp, k_* W^\perp) d\mu_K(k) \end{aligned} \tag{5.6}$$

と定義していた。これは K がコンパクトであることから従う。

$h(r) \in \mathrm{II}(W)$ を W に接してその点が主曲率 r の umbilic point となる超曲面の第二基本形式とする。これは形式的に $\mathrm{II}(W)$ の元を考えているだけであって、このような超曲面の存在は問題にはならない。つまり、$\mathrm{II}(W)$ を $(n-1)$ 次の対称行列全体の空間と同一視したとき、$h(r) = rI_{n-1}$ とおくこととに等しい。$h(r) \in \mathrm{II}(W)$ は $K(v)$ 作用による不動点であることを注意しておく。

$[k] = [k'] \in K/K(v)$ とすると、$g \in K(v)$ が存在して $k' = kg$ となる。したがって (5.6) において $h_2 = h(r)$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\Big(G_{k'_* W}(V, h_1) + G_V(k'_* W, k' h(r))\Big)\sigma(V^\perp, k'_* W^\perp) \\ &= \mathcal{P}\Big(G_{kg_* W}(V, h_1) + G_V(kg_* W, kgh(r))\Big)\sigma(V^\perp, kg_* W^\perp) \\ &= \mathcal{P}\Big(G_{k_* W}(V, h_1) + G_V(k_* W, kh(r))\Big)\sigma(V^\perp, k_* W^\perp) \end{aligned}$$

となる。これは、K を $K/K(v)$ 上の $K(v)$ をファイバーとする principal fiber bundle と思うと、(5.6) の被積分関数は各ファイバー上で一定であることを意味している。よって、K 上の積分は $K/K(v)$ 上の積分に帰着される。

$$\begin{aligned} & I_K^{\mathcal{P}}(V, h_1, W, h(r)) \\ &= \mathrm{vol}(K(v)) \int_{K/K(v)} \mathcal{P}\Big(G_{[k]_* W}(V, h_1) + G_V([k]_* W, [k]h(r))\Big) \\ &\qquad\qquad \sigma(V^\perp, [k]_* W^\perp) d\mu_{K/K(v)}([k]) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(S^{n-1})} \int_{K/K(v)} \mathcal{P}\Big(G_{[k]_* W}(V, h_1) + G_V([k]_* W, [k]h(r))\Big) \\ &\qquad\qquad \sigma(V^\perp, [k]_* W^\perp) d\mu_{S^{n-1}}([k]) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} I_{SO(n)}^{\mathcal{P}}(V, h_1, W, h(r)) \end{aligned} \tag{5.7}$$

2 番目の等号は $K/K(v)$ の不変測度を S^{n-1} の測度に normalize することによって得られ、最後の等号は K 上の積分を球面上の積分に帰着させた過程の逆をたどって $SO(n)$ 上の積分に戻すことによって得られる。

等式 (5.7) において $\dim V = \dim W = n-1$ として、特に $\mathcal{P} = \mathcal{W}_2$ の場合を考える。K は Grassmann 多様体 $Gr_{n-1}(T)$ に推移的に作用するので $V = W = v^{\perp}$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、補題 3.4 より $K(V)$ 不変な $\mathrm{II}(V)$ 上の奇数次の同次多項式は存在しないので、補題 2.4 より $\mathrm{II}(V)$ 上の $K(V)$ 不変な 2 次の同次多項式 $\mathcal{Q}$ が存在して、任意の $h_1, h_2 \in \mathrm{II}(W)$ について

$$I_K^{\mathcal{W}_2}(V, h_1, V, h_2) = \mathcal{Q}(h_1) + \mathcal{Q}(h_2)$$

が成り立つ。一方、特に $K = SO(n)$ の場合は命題 2.6 であるから、これらの多項式は

$$I_{SO(n)}^{\mathcal{W}_2}(V, h_1, V, h_2) = a(n-1, n-1, n)\big(\mathcal{W}_2(h_1) + \mathcal{W}_2(h_2)\big)$$

となる。したがって、(5.7) より

$$\mathcal{Q}(h_1) + \mathcal{Q}(h(r)) = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} b(n-1, n-1, n)\big(\mathcal{W}_2(h_1) + \mathcal{W}_2(h(r))\big)$$

となる。$\mathcal{W}_2$ は 2 次の同次多項式であり、$h(r) = rI_{n-1}$ であることから

$$\mathcal{Q}(h_1) + r^2\mathcal{Q}(h(1)) = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} a(n-1, n-1, n)\big(\mathcal{W}_2(h_1) + r^2\mathcal{W}_2(h(1))\big)$$

今 r は任意の実数であるから r の多項式としての各次数の係数は一致して

$$\mathcal{Q}(h_1) = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} a(n-1, n-1, n)\mathcal{W}_2(h_1)$$

を得る。さらに、同様の議論が $\mathcal{P} = \mathcal{U}_{n-2}$ としたときも成り立つ。以上の議論から次の結果を得る。

定理 5.1. G/K を two point homogeneous space とし、M と N をその実超曲面とする。このとき、次の kinematic formula が成立する。

$$\begin{aligned}
&\int_G I^{\mathcal{W}_2}(M \cap gN) d\mu_G(g) \\
&\qquad = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} a(n-1, n-1, n)\big(I^{\mathcal{W}_2}(M)\mathrm{vol}(N) + \mathrm{vol}(M) I^{\mathcal{W}_2}(N)\big) \\
&\int_G I^{\mathcal{U}_{n-2}}(M \cap gN) d\mu_G(g) \\
&\qquad = \frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(SO(n))} b(n-1, n-1, n)\big(I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\mathrm{vol}(N) + \mathrm{vol}(M) I^{\mathcal{U}_{n-1}}(N)\big)
\end{aligned}$$

6 Problems

問題 6.1. 定理 5.1 に関してより高次の積分不変量についての kinematic formula も実空間形の場合の formula を転送することによって得られるだろうか？さらに、一般に K の $Gr_p(T)$ への作用の orbit equivalent クラスにおいて transfer principle が成立するだろうか?

問題 6.2. 命題 4.1 においては N は超曲面としたがもう一方の M は一般の次元で Poicaré の公式が部分多様体の体積の積で表すことができた。では、定理 5.1 の kinematic formula についてはどうであろうか？一方の M を一般次元にした場合も二つの部分多様体の不変量の積で表されるだろうか？

参考文献

[1] B. Y. Chen, *An invariant of conformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 563–564.

[2] B. Y. Chen, *Some conformal invariants of submanifolds and their applications*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) bf 10 (1974), 380–385.

[3] S. S. Chern, *On the Kinematic Formula in Integral Geometry*, J. Math. Mech. **16** (1966), 101–118.

[4] H. Federer, *Curvature measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1959), 418–491.

[5] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. No.509 **106** (1993).

[6] H. J. Kang, T. Sakai and Y. J. Suh, *Kinematic formulas for hypersurfaces in real space forms*, to appear in Indiana Univ. Math. J.

[7] Nijenhuis, *On Chern's kinematic formula in integral geometry*, J. Diff. Geo. **9** (1974), 475–482.

[8] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1976).

[9] B. D. Suceavă, *The spread of the shape operator as conformal invariant*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), no. 4, Article 74, 8 pp. (electronic).

[10] Wolf, *Space of constant curvature*, McGraw-Hill, New York, 1967.